I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

V továrně na výrobu plyšových hraček mají dva stroje. První vyrobí čtyři zajíce za stejnou dobu, za kterou vyrobí druhý pět medvědů. Aby bylo jejich ovládání jednodušší, oba dva stroje se spouští a vypínají najednou společným vypínačem. Navíc jsou stroje seřízené tak, že první po spuštění nejdříve vyrobí tři zajíce růžové, pak jednoho modrého, pak zase tři růžové atd. Druhý po spuštění nejprve vyrobí čtyři medvědy modré, pak jednoho růžového, pak opět čtyři modré atd.

V jistém okamžiku bylo na těchto dvou strojích vyrobeno celkem 220 modrých hraček. Kolik bylo k témuž okamžiku vyrobeno růžových zajíců? *(M. Petrová)*

Nápověda. Zjistěte, kolik je vyrobeno modrých hraček poté, co první stroj dokončí čtvrtého zajíce.

Možné řešení. Době, za kterou první stroj vyrobí 4 hračky a druhý stroj 5 hraček, budeme říkat „cyklus". Během jednoho cyklu se tedy vyrobí: 3 růžoví zajíci, 1 modrý zajíc, 4 modří medvědi a 1 růžový medvěd, tj. celkem 4 růžové a 5 modrých hraček.

To znamená, že 220 modrých hraček se vyrobí za $220 : 5 = 44$ úplných cyklů. Protože za jeden cyklus první stroj vyrobí 3 růžové zajíce, za 44 cyklů vyrobí $44 \cdot 3 = 132$ růžových zajíců. V každém cyklu se nejprve vyrábějí růžoví zajíci a pak teprve modrý. Proto v okamžiku, kdy oba stroje vyrobí 220 modrých hraček, bylo na prvním stroji vyrobeno 132 růžových zajíců.

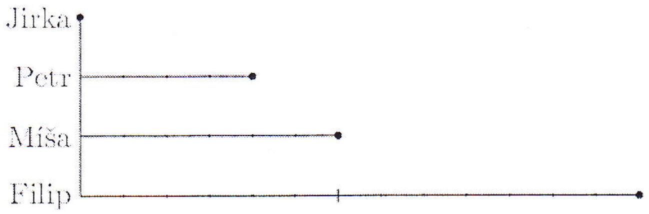
Z6–I–2

Jirka, Míša, Petr, Filip a Saša skákali do dálky. Saša skočil 135 cm, Petr skočil o 4 cm více než Jirka, Jirka o 6 cm méně než Míša a Míša o 7 cm méně než Filip. Navíc Filipův skok byl přesně v polovině mezi tím Petrovým a Sašovým.

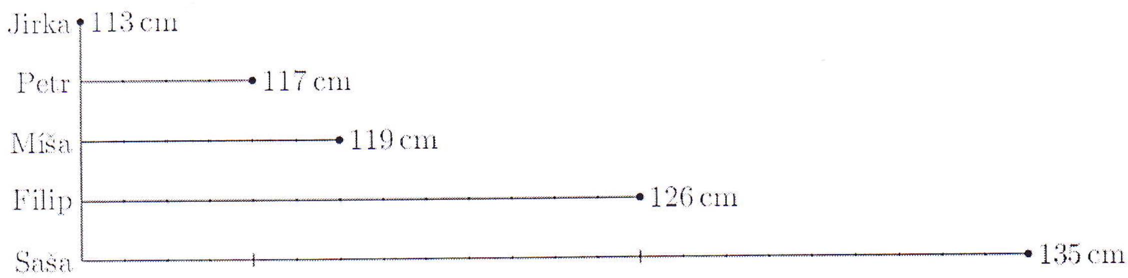
Zjistěte, kolik cm skočili jednotliví chlapci. *(M. Dillingerová)*

Nápověda. Porovnejte délky Jirkova, Míšova, Petrova a Filipova skoku.

Možné řešení. Prozatím neuvažujme Sašův skok a délky skoků ostatních chlapců seřaďme od nejkratšího po nejdelší. Ze zadání je zřejmé, že nejméně skočil Jirka: Petr skočil o 4 cm více než Jirka, Míša skočil o 6 cm více než Jirka, Filip skočil o 7 cm více než Míša, tedy o 13 cm více než Jirka.



Protože Filipův skok má být přesně v polovině mezi Petrovým a Sašovým a protože Petr skočil méně než Filip, musel Saša skočit nejvíc ze všech chlapců. A protože Filip skočil o 9 cm víc než Petr ($13 - 4 = 9$), musel tedy zároveň skočit o 9 cm méně než Saša. Odtud určíme, že Filip skočil 126 cm ($135 - 9 = 126$), Jirka skočil 113 cm ($126 - 13 = 113$), Petr skočil 117 cm ($113 + 4 = 117$) a Míša skočil 119 cm ($113 + 6 = 119$).



Z6–I–3

Kolik musíme napsat číslic, chceme-li vypsat všechna přirozená čísla od 1 do 2 013?

(M. Volfová)

Nápověda. Počítejte systematicky.

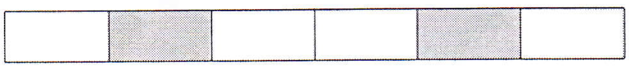
Možné řešení. Musíme napsat všechna jedno-, dvoj- a trojmístná čísla a část čtyřmístných čísel. Postupně počítáme počty napsaných čísel a číslic:

napsaná čísla	počet čísel	počet číslic
$1, \ldots, 9$	9	9
$10, \ldots, 99$	90	180
$100, \ldots, 999$	900	2 700
$1\,000, \ldots, 2\,013$	1 014	4 056
celkem	2 013	6 945

K zapsání čísel od 1 do 2 013 je třeba 6 945 číslic.

Z6–I–4

Správně vyplněná tabulka na obrázku má obsahovat šest přirozených čísel, přičemž v šedém poli má být součet čísel z dvou bílých polí, která s ním sousedí.



Určete čísla správně vyplněné tabulky, víte-li, že součet prvních dvou čísel zleva je 33, součet prvních dvou čísel zprava je 28 a součet všech šesti čísel je 64. *(L. Šimůnek)*

Nápověda. Jaký součet dává třetí a čtvrté číslo?

Možné řešení. Součet třetího a čtvrtého přirozeného čísla je $64 - 33 - 28 = 3$, jsou to tudíž čísla 1 a 2. Nejprve předpokládejme, že číslo 1 je na třetí pozici a číslo 2 na čtvrté. Na první pozici by pak bylo $(33 - 1) : 2 = 16$ a na šesté $(28 - 2) : 2 = 13$.

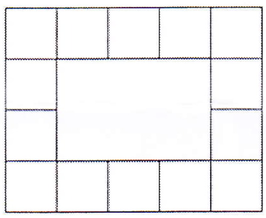
Ještě prověřme možnost, kdy číslo 1 je na čtvrté pozici a číslo 2 na třetí. Na první pozici by pak muselo být $(33 - 2) : 2 = 15{,}5$, což nepřipouští zadání, neboť v tabulce mají být přirozená čísla. Tabulku lze tedy vyplnit jediným způsobem:

16	17	1	2	15	13

Z6–I–5

Adam dostal od dědečka dřevěné kostky. Všechny byly stejné a byly to krychle s hranou dlouhou 4 cm. Rozhodl se, že z nich bude skládat komíny, a to takové:

- aby byly použity všechny kostky,
- aby komín při pohledu shora vypadal jako „dutý obdélník“ nebo „dutý čtverec“ ohraničený jednou řadou kostek (podobně jako na obrázku),
- aby ani v nejvyšší vrstvě žádná kostka nechyběla.



Adam zjistil, že podle těchto pravidel může postavit komín vysoký 16 cm, nebo 20 cm, nebo 24 cm.

1. Jaký nejmenší počet kostek mohl Adam dostat od dědečka?
2. Jak vysoký je nejvyšší komín, který může Adam s tímto počtem kostek postavit podle uvedených pravidel?

(M. Petrová)

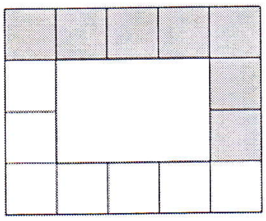
Nápověda. Rozhodněte, zda mohl Adam dostat například 100 kostek.

Možné řešení. Nejprve spočítáme, kolik vrstev měly jednotlivé Adamovy komíny:

1. komín: $16 : 4 = 4$,
2. komín: $20 : 4 = 5$,
3. komín: $24 : 4 = 6$.

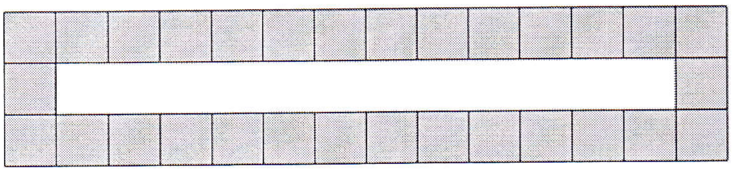
Protože všechny vrstvy byly úplné, musí být počet kostek dělitelný čtyřmi, pěti a šesti zároveň. Nejmenší společný násobek těchto tří čísel je 60, počet kostek proto musí být nějakým násobkem šedesáti. Ověříme, zda mohl Adam dostat 60 kostek:

1. komín má 4 vrstvy, což by znamenalo 15 kostek v jedné vrstvě ($60 : 4 = 15$). To ale není možné, protože v každé vrstvě je sudý počet kostek („had“ z kostek se dá vždycky rozdělit na 2 stejné části, viz obrázek).



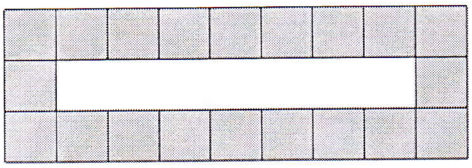
Adam tedy dostal více než 60 kostek: další možnost je $2 \cdot 60 = 120$:

1. komín má 4 vrstvy, tzn. 30 kostek v jedné vrstvě ($120 : 4 = 30$). To lze splnit např. takto:



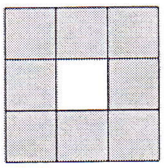
2. komín má 5 vrstev, tzn. 24 kostek v jedné vrstvě ($120 : 5 = 24$). To lze splnit např. takto:

3. komín má 6 vrstev, tzn. 20 kostek v jedné vrstvě ($120 : 6 = 20$). To lze splnit např. takto:



Tím jsme dokázali, že nejmenší počet kostek, který mohl Adam dostat, je 120.

Nyní ještě zjistíme výšku nejvyššího komínu, který lze ze 120 kostek postavit podle Adamových pravidel. Na jednu vrstvu potřebujeme nejméně 8 kostek:

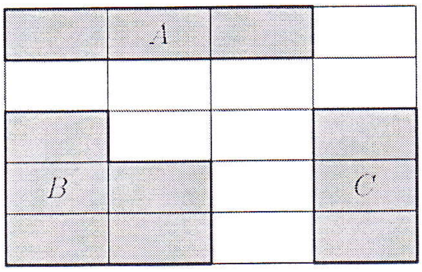


V takovém případě bude mít komín 15 úplných vrstev ($120 : 8 = 15$). Kostky jsou vysoké 4 cm, takže nejvyšší komín, který lze postavit ze 120 kostek, měří 60 cm ($15 \cdot 4 = 60$).

Z6–I–6

Na obrázku je síť složená z 20 shodných obdélníků, do které jsme zakreslili tři obrazce a vybarvili je. Obdélník označený písmenem A a šestiúhelník označený písmenem B mají shodné obvody, a to 56 cm. Vypočítejte obvod třetího obrazce označeného písmenem C.

(L. Šimůnek)



Nápověda. Určete, o kolik vodorovných a o kolik svislých dílků se liší obvody obrazců A a B.

Možné řešení. Délky stran obdélníků, z nichž se skládá síť, označme x a y (x pro vodorovnou stranu a y pro svislou). Obvod obrazce A je roven $6x + 2y$, obvod obrazce B je $4x + 6y$ a obvod obrazce C je $2x + 6y$.

V obvodu obrazce A je započítáno o 2 délky x více a o 4 délky y méně než v obvodu obrazce B. Obvody A a B jsou podle zadání stejné, tedy $2x$ je rovno $4y$. Odtud vidíme, že x je dvakrát větší než y, tedy že $x = 2y$. Obvod obrazce A tak můžeme vyjádřit jako $14y$, odtud $y = 56 : 14 = 4$ (cm). Obvod obrazce C je $10y = 10 \cdot 4 = 40$ (cm).